Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P21) Zeigen Sie: Ist z_0 eine Polstelle der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, so existiert zu jedem hinreichend kleinen $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq U$ ein $R > 0$, so dass $f(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, R)}$ enthält.

(P22) Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer nicht hebbaren Singularität in z_0. Was können Sie über den Typ der Singularität z_0 für die Funktion $\sin \circ f$ sagen?

(P23) Zu einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ definieren wir die Abbildung $\varphi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ durch

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Zeigen Sie:

a) $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ für alle $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, d.h. durch $A \mapsto \varphi_A$ wird ein Gruppenhomomorphismus $GL(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ definiert.

b) $\varphi_A = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ genau dann, wenn $A = \alpha \cdot \mathbb{1}$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$, wobei $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 2.6. in der Vorlesung.

(A28) Beweisen Sie: Sind $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $f = c \cdot g$.

(A29) $U \subseteq \mathbb{C}$ sei eine offene Teilmenge. Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von L'Hospital für den Quotienten zweier auf U holomorpher Funktionen, die in einem Punkt $z_0 \in U$ eine gemeinsame Nullstelle haben!

(A30) Beweisen Sie:

a) Jede Möbiustransformation lässt sich als Verknüpfung von Abbildungen der folgenden drei Formen schreiben (wobei $b \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}^*$ freie Konstanten sind):

$$T_b(z) = z + b, \qquad S_a(z) = az, \quad \text{und} \quad I(z) = \frac{1}{z}.$$

b) Jede Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Unter *verallgemeinerten Kreisen in* $\overline{\mathbb{C}}$ verstehen wir alle Kreise in $\mathbb{C}$ sowie die Vereinigung einer beliebigen Geraden in $\mathbb{C}$ mit dem Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.
Hinweis: Eine einheitliche algebraische Beschreibung verallgemeinerter Kreise haben wir in Aufgabe **(A4)** *auf Blatt 1 gegeben.*

(A31) $r : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sei eine rationale Funktion vom Grad 2, d.h. ein Quotient $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ von Polynomen ohne gemeinsame Nullstellen, wobei das Maximum der Grade von p und q genau 2 ist.

a) Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation φ und eine affin lineare Abbildung[1] ψ existieren, so dass $\psi \circ r \circ \varphi$ eine der beiden Abbildungen

$$Q(z) = z^2 \qquad \text{oder} \qquad H(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

ist. Wie erkennt man an der Funktion r, welcher Fall vorliegt?

b) Gibt es Möbiustransformationen φ und $\widetilde{\psi}$ mit $\widetilde{\psi} \circ H \circ \varphi = Q$?

Hinweis: Durch geometrische Argumente lässt sich der Rechenaufwand reduzieren.

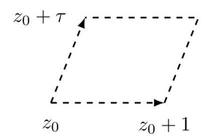
[1] Das bedeutet $\psi(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$, d.h. $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

Siehe nächstes Blatt!

(A32) *(optional)* Sei $\tau \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Im} \tau > 0$, d.h. $\tau \in \mathbb{H}$, und sei $\Lambda_\tau \subseteq \mathbb{C}$ die additive Untergruppe

$$\Lambda_\tau := \{z = m + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist ein Beweis dafür, dass die Quotientengruppe $E_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ die Struktur einer Riemannschen Fläche trägt, so dass die Projektion $\pi : \mathbb{C} \to E_\tau$ eine holomorphe Abbildung ist. Diese Riemannschen Flächen nennt man *elliptische Kurven.*



Für $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $P(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ das offene Parallelogramm mit linkem unteren Eckpunkt z_0 und Kantenvektoren 1 und τ, also

$$P(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z = z_0 + \lambda + \mu \cdot \tau \text{ mit } \lambda, \mu \in (0,1)\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie:

a) Deklariert man eine Teilmenge $U \subseteq E_\tau$ genau dann als offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, so wird dadurch eine Topologie auf E_τ definiert.[2]

b) Die Projektion $\pi : \mathbb{C} \to E_\tau$, die jeden Punkt in $\mathbb{C}$ auf seine Äquivalenzklasse in E_τ abbildet, ist auf jedem $P(z_0)$ injektiv (also ein Homöomorphismus auf das jeweilige Bild). Die Umkehrabbildung liefert uns also eine Karte für E_τ mit Definitionsbereich $\pi(P(z_0))$.

c) Die vier offenen Mengen $\pi(P(0))$, $\pi(P(\frac{1}{2}))$, $\pi(P(\frac{\tau}{2}))$ und $\pi(P(\frac{1+\tau}{2}))$ bilden eine offene Überdeckung von E_τ. Wieviele Zusammenhangskomponenten haben jeweils die paarweisen Durchschnitte?

d) Die Karten wie in **a)** zur Überdeckung wie in **b)** bilden einen Atlas für E_τ. Geben Sie dafür einen exemplarischen Beweis, indem Sie für $z = 0$ und $w = \frac{1+\tau}{2}$ die Komponenten des Durchschnitts $\pi(P(z)) \cap \pi(P(w))$ beschreiben und für jede dieser Komponenten eine explizite Formel für die Kartenübergangsabbildung angeben.

[2] Mit dieser Topologie ist E_τ homöomorph zu $S^1 \times S^1$, also insbesondere metrisierbar. Dies müssen Sie nicht zeigen.