Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P17) Bestimmen Sie den Konvergenzradius sowie die ersten 6 Koeffizienten der Taylorreihe von $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ in $z_0 = 0$.

(P18) Seien f und g holomorphe Funktionen auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ die in $z_0 = 0$ Nullstellen der Ordnungen n und m haben.

a) Was ist die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion $f \cdot g$?

b) Was ist die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion $f \circ g$?

Verwenden Sie diese Überlegungen, um die Ordnungen (aller) Nullstellen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

c) $f(z) = z^p \cdot \sin(z^q)$, für $p, q \in \mathbb{N}$.

d) $g(z) = 1 - \cos^2(z^3)$.

(P19) Teil **d)** ist unabhängig von den anderen lösbar.

a) Verifizieren Sie für $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + \mathbf{i}\cos(x)\sinh(y),$$

b) Finden Sie eine analoge Formel für die komplexe Kosinusfunktion.

c) Gelten diese Formeln nur für $x, y \in \mathbb{R}$, oder auch für $x, y \in \mathbb{C}$?

d) Existiert $\lim\limits_{z\to\infty} \sin(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$?

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 19.5. in der Vorlesung.

(A23) Finden Sie zur Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos(z)$ eine explizite Formel für eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Umgebungen von $0 \in \mathbb{C}$, so dass für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U$ gilt:

$$f(z) = f(0) + (\varphi(z))^n.$$

(A24) Finden Sie jeweils biholomorphe Abbildungen zwischen

a) dem Sektor $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$ und der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$,

b) dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$ und dem ersten Quadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$,

c) der halben Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$, sowie

d) *(optional)* der doppelt geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$!

(A25) Beweisen Sie das *Minimumprinzip*: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, so dass das Minimum der Funktion $|f| : G \to \mathbb{R}$ in G angenommen wird, dann besitzt f eine Nullstelle in G.

(A26) Finden Sie alle Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie für die *isolierten* Singularitäten jeweils den Typ (und bei Polstellen die Ordnung):

a) $\dfrac{e^z - 1}{z^n}$, für festes $n \in \mathbb{N}$

b) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$

c) $\tan\left(\dfrac{1}{z}\right)$

d) $\dfrac{1}{\cos(z)^2}$

(A27) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}(U)$ der auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen eine $\mathbb{C}$-Algebra bildet. Beweisen Sie außerdem, dass diese Algebra genau dann nullteilerfrei ist, falls U ein Gebiet ist.[1]

[1] Falls Sie die Begriffe $\mathbb{C}$-*Algebra* oder *nullteilerfrei* nicht kennen, so schlagen Sie diese in einem Algebra-Lehrbuch nach.