Back and Forth Methode

Marie Feddersen

27.09.2024

Beispiel 1

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

Die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte wird von den folgenden Axiomen axiomatisiert:

$$\left.\begin{array}{c} \bullet\ \ \forall x\ \neg(x < x) \\ \bullet\ \ \forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\ \bullet\ \ \forall x \forall y\ (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{array}\right\}$$

$$\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow \exists z\ x < z < y) \quad (\textit{Dichtheit})$$

$$\forall x \exists y \exists z\ y < x < z \quad (\textit{ohne Endpunkte})$$

Theorem

Die Theorie der dichten linearen Ordnungen ist $\aleph_0$-kategorisch und vollständig.

Beweis: $(A,<), (B,<)$ abzählbare Modelle für DLO.
$A = \{a_0, a_1, \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, \dots\}$
Ziel: Konstruiere $f_i : A_i \to B_i$ mit
- $A_i \subset A$ endlich, $B_i \subset B$ endlich
- f_i bijektiv
- für $x, y \in A_i$: $x < y \Leftrightarrow f_i(x) < f_i(y)$
- $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$

Werden für $i \in \mathbb{N}$ A_i und B_i so wählen, dass $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ und $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ und $f := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$ der gewünschte Isomorphismus.

<u>1. Schritt</u>: $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$

<u>2. Schritt</u>: (Back and Forth Argument)

1. Fall: $n+1$ ist ungerade, also $n+1 = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$
   Ziel: Finde ein Bild für a_m
   - Ist $a_m \in A_n$ setze $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = B_n$, $f_{n+1} = f_n$
   - $a_m \notin A_n$: Finde $b \in B \setminus B_n$ mit $\alpha < a_m \Leftrightarrow f_n(\alpha) < b \;\; \forall \alpha \in A_n$
     (i) $a_m > \alpha \;\; \forall \alpha \in A_n$ (ii) $a_m < \alpha \;\; \forall \alpha \in A_n$
     (iii) $\exists \alpha, \beta \in A_n$ mit $\alpha < a_m < \beta$ und $\forall \gamma \in A_n$ gilt $\gamma \leq \alpha$ oder $\gamma \geq \beta$.

zu (i): B ist Modell für DLO und B_n endlich, daher gibt es $b \in B \setminus B_n$ mit $b > \beta \ \forall \beta \in B_n$.

zu (ii): – " – mit $b < \beta \ \forall \beta \in B_n$

zu (iii): f_n hat p. V. die gewünschten Eigenschaften, daher gilt $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$ und da B Modell für DLO gibt es ein $b \in B \setminus B_n$ mit $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$.

(Bem.: Offensichtlich erfüllt b: $\gamma < a_m \iff f_n(\gamma) < b \ \forall \gamma \in A_n$)

Setze $A_{n+1} = A_n \cup \{a_m\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b\}$, $f_{n+1}: A_{n+1} \to B_{n+1}$, $f_{n+1}|_{A_n} \equiv f_n$ und $f_{n+1}(a_m) = b$.

2. Fall: $n+1$ ist gerade, $n+1 = 2m+2$ für ein $m \in \mathbb{N}$

Ziel: Finde ein Urbild für b_m

- Ist $b_m \in B_n$ setze $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = B_n$, $f_{n+1} = f_n$
- Ist $b_m \notin B_n$ müssen wir $a \in A \setminus A_n$ finden mit $\alpha < a \iff f_n(\alpha) < b_m \ \forall \alpha \in A_n$

(i) $b_m > \beta \ \forall \beta \in B_n$ (ii) $b_m < \beta \ \forall \beta \in B_n$

(iii) Es gibt $\alpha, \beta \in B_n$ mit $\alpha < b_m < \beta$ und $\forall \gamma \in B_n$: $\gamma \leq \alpha$ oder $\gamma \geq \beta$

Zu (i) und (ii): Da A Modell für DLO finden wir ein geeignetes a.

zu (iii): Da f_n die gewünschten Eigenschaften hat gilt $f_n^{-1}(\alpha) < f_n^{-1}(\beta)$ und da A Modell für DLO gibt es ein $a \in A \setminus A_n$ mit $f_n^{-1}(\alpha) < a < f_n^{-1}(\beta)$.

Setze $A_{n+1} = A_n \cup \{a\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b_m\}$, $f_{n+1}: A_{n+1} \to B_{n+1}$, $f_{n+1}|_{A_n} \equiv f_n$ und $f_{n+1}(a) = b_m$.

Da für $m \in \mathbb{N}$ gilt: $a_m \in A_{2m+1}$ und $b_m \in B_{2m+2}$, gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = B$. Da $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ ist $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$ eine wohldef. Bijektion mit der gewünschten Eigenschaft.

Vollständigkeit:

- DLO ist erfüllbar (z.B ist $\mathbb{Q}$ Modell)
- DLO hat keine endlichen Modelle (↯ Dichtheit)
- DLO ist $\aleph_0$-kategorisch (und $\aleph_0 > 1 = |L|$)

$\xRightarrow{\text{Vaught's Test}}$ DLO vollständig

Der Zufallsgraph

Sei $\mathcal{L} = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol sei.

Die Theorie T enthalte genau die nachfolgenden Axiome:

$$\left.\begin{array}{c} \forall x\ \neg R(x,x) \\ \forall x \forall y\ R(x,y) \to R(y,x) \end{array}\right\} \text{Graphaxiom}$$

$$\exists x \exists y\ x \neq y$$

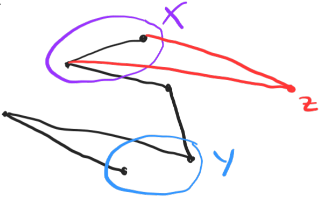
$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_i \right.$$

$$\left. \to \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z) \wedge y_i \neq z) \right)$$

für alle n $\in \mathbb{N}$.

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_i \right.$$

$$\left. \to \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z) \wedge y_i \neq z) \right)$$



Theorem

T ist erfüllbar und $\aleph_0$-kategorisch. Insbesondere ist T vollständig und entscheidbar.

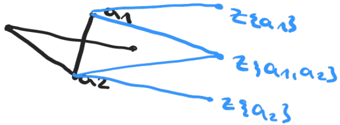
Beweis:

Behauptung: Sei G_0 ein beliebiger abzählbar unendlicher Graph. Dann gibt es einen abzählbaren Graphen G_1 mit $G_0 \subset G_1$, der folgende Eigenschaft erfüllt: Zu zwei endlichen, disjunkten Teilmengen X und Y von G_0 gibt es ein $z \in G_1$, sodass $R(x, z)$ für alle $x \in X$ und $\neg R(y, z)$ für alle $y \in Y$ gilt.

G_0 abzählbarer unendlicher Graph ($G_0 = (V_0, E_0)$). Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = V_0 \cup \{z_X \mid X \subset V_0$ und $|X| < \infty\}$ und
$E_1 = E_0 \cup \{(x, z_X) \mid X \subset V_0, |X| < \infty, x \in X\} \cup \{(z_X, x) \mid X \subset V_0, |X| < \infty, x \in X\}$

Bsp.: Ausschnitt G_0

Ausschnitt G_1



Bem.: Da S_0 abzählbar, ist die Menge aller endlichen Teilmengen von S_0 ist abzählbar und damit S_1. Weiter hat S_1 die gewünschte Eigenschaft.

Nun iterieren wir diese Konstruktion. Falls X und Y endliche disjunkte TM von S_i sind, gibt es $z \in S_{i+1}$ mit $R(x,z)\ \forall x \in X$ und $\neg R(y,z)\ \forall y \in Y$.

Dann ist $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ ein abzählbares Modell für T.

Nun zeigen wir, dass T $\aleph_0$-kategorisch ist:

$S_1 = \{a_0, a_1, \dots\}$, $S_2 = \{b_0, b_1, \dots\}$ (abzählbare) Modelle für T.

Ziel: Konstruiere f_i als Abbildung von endlichen TM von S_1 in endliche TM von S_2 mit:

- f_i bijektiv
- $\forall x, y \in Df_i : S_1 \models R(x,y) \iff S_2 \models R(f_i(x), f_i(y))$ (*)
- $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$

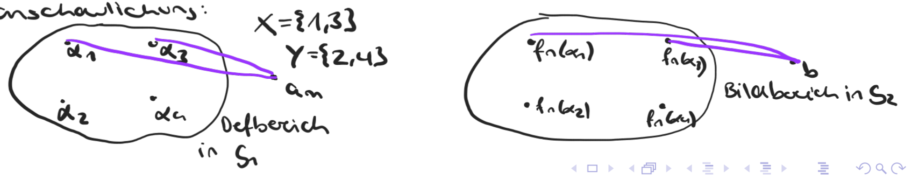
1. Schritt: $f_0 = \emptyset$

2. Schritt: 1. Fall: $n+1$ ungerade, also gibt es m mit $n+1 = 2m+1$

Ziel: Finde ein Bild für a_m

- $a_m \in Df_n$ setze $f_{n+1} = f_n$
- $a_m \notin Df_n$, so sei $Df_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ und setze $X = \{j \le k : R(\alpha_j, a_m)\}$, $Y = \{j \le k : \neg R(\alpha_j, a_m)\}$

Veranschaulichung:



Da G_2 Modell für T gibt es $b \in G_2 \setminus Im(f_n)$ mit $G_2 \models R(f_n(a_j), b)$ für $j \in X$ und $G_2 \models \neg R(f_n(a_j), b)$ für $j \in Y$. Setze $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_m, b)\}$. Dann erfüllt f_{n+1} die gewünschten Bedingungen.

Fall 2: $n+1$ ist gerade, also $n+1 = 2m+2$ für $m \in \mathbb{N}$

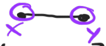
Ziel: Finde ein Urbild für b_m

- Falls $b_m \in Im(f_n)$, so setze $f_{n+1} = f_n$
- Falls $b_m \notin Im(f_n)$ sei $Im(f_n) = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ und setze $X = \{j \leq k : R(\beta_j, b_m)\}$ und $Y = \{j \leq k : \neg R(\beta_j, b_m)\}$.

Da G_1 Modell für T ist, gibt es $a \in G_1 \setminus Df_n$ mit $G_1 \models R(f_n^{-1}(\beta_j), a)$ für $j \in X$ und $G_1 \models \neg R(f_n^{-1}(\beta_j), a)$ für $j \in Y$. Setze $f_{n+1} = f_n \cup \{(a, b_m)\}$.

Nun ist $f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ eine wohldef. Bijektion von G_1 nach G_2 mit den gewünschten Eigenschaften.

Vollständigkeit: erfüllbar ✓, kein endl. Modell, $\aleph_0$-kategorisch $\xRightarrow{\text{Vaught's Test}}$ Vollständigkeit



Entscheidbarkeit folgt aus Lemma 2.28.

Sei $\mathcal{G}_N$ die Menge aller Graphen mit den Knoten $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Für eine beliebige $\mathcal{L}$-Aussage ϕ ist

$$p_N(\phi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \phi\}|}{|\mathcal{G}_N|}$$

Lemma

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\psi_n) = 1$$

Beweis: Fixiere n und sei G ein beliebiger Graph in G_N mit $N > 2n$.
Fixiere $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z \in G$ paarweise verschieden.
Sei q die Wahrscheinlichkeit $\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(R(x_i,z) \wedge \neg R(y_i,z))\right)$.
Da für einen zufälligen Graphen die Wahrscheinlichkeit für $R(x,y)$ mit $x \neq y$ $\frac{1}{2}$. $q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 1 - 2^{-2n}$.
Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von den gewählten Knoten. Für z gibt es $N-2n$ Möglichkeiten. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass es kein z gibt, das dies erfüllt ist also q^{N-2n}. Nun sei M die Anzahl von Paaren disjunkter TM der Kardinalität n (alle Möglichkeiten zur Wahl von $x_1, \dots, y_n$).
Dann gilt:

$$p_N(\neg\psi_n) \le M \cdot q^{N-2n} < N^{2n} \cdot q^{N-2n}$$

Da $q < 1$ gilt: $0 \le \lim\limits_{N\to\infty} p_N(\neg\psi_n) \le \lim\limits_{N\to\infty} N^{2n} \cdot q^{N-2n} = 0$

$\rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} p_N(\psi_n) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} p_N(\neg\psi_n) = 1.$ $\square$

Theorem (Null-Eins Gesetz für Graphen)

Für jede $\mathcal{L}$-Aussage ϕ gilt entweder

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 0 \text{ oder } \lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1.$$

T axiomatisiert die Theorie $\underbrace{\{\phi : \lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1\}}$.

Diese Theorie ist entscheidbar und vollständig.

Beweis: 1. Fall: $T \models \varphi$, dann gibt es nach Lemma 2.1.14. ein $\Delta \subseteq T$ endlich, sodass $\Delta \models \varphi$. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\Delta \subseteq \mathcal{G} \cup E \cup \{\psi_i \mid i \leq n\}$. Für einen beliebigen Graphen $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_N$ (mit mind. 2 Ecken) und $\mathcal{G} \models \psi_n$ gilt, dann $\mathcal{G} \models \psi_i$ für $i \leq n$ und damit $\mathcal{G} \models \Delta$, woraus $\mathcal{G} \models \varphi$ folgt.

Also gilt $|\{\mathcal{G} \in \mathcal{G}_N : \mathcal{G} \models \varphi\}| \geq |\{\mathcal{G} \in \mathcal{G}_N : \mathcal{G} \models \psi_n\}|$ und damit $p_N(\varphi) \geq p_N(\psi_n)$ und mit vorherigen Lemma gilt dann

$$1 = \lim_{N\to\infty} p_N(\psi_n) \leq \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) \leq 1.$$

2. Fall: $T \not\models \varphi$. Da T vollständig ist, gilt $T \models \neg\varphi$ und $\lim_{N\to\infty} p_N(\neg\varphi) = 1$ und daher $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 0$.

Also gilt $T \models \varphi \iff \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1 \Rightarrow T$ axiomatisiert $\{\varphi : \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1\}$.

Vollständigkeit folgt direkt aus obigen Resultat.

Die Entscheidbarkeit folgt aus der Entscheidbarkeit von T, denn

$$T \models \varphi \iff \{\varphi : \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1\} \models \varphi. \quad \square$$